

Matematická indukce a infima/suprema (2. týden)

Teorie

Definice. Pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ a $C \subset Y$ definujeme

- $f(A)$, **obraz** množiny A při zobrazení f , jako

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\} = \bigcup_{x \in A} f(x),$$

- $f^{-1}(C)$, **vzor** množiny C při zobrazení f , jako

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

Definice (omezená množina, sup, inf). Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$, kde $(T, +, \cdot, 0, 1)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$. Prvek $x \in T$ nazýváme

1. **horní závorou** množiny M , pokud pro každé $y \in M$ platí $y \leq x$
2. **dolní závorou** množiny M , pokud pro každé $y \in M$ platí $y \geq x$
3. **supremem** množiny M , pokud je x horní závora M a navíc pro každé y horní závoru M platí $y \geq x$,
4. **infimem** množiny M , pokud je x dolní závora M a navíc pro každé y dolní závoru M platí $y \leq x$,

Množinu M nazýváme zdola (shora) omezenou, pokud má nějakou dolní (horní) závoru, M nazveme omezenou, pokud je zdola i shora omezená.

Fakt. Každá neprázdná shora omezená množina v $\mathbb{R}$ má supremum. Každá neprázdná zdola omezená množina v $\mathbb{R}$ má infimum.

Věta (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.

Příklady na procvičení

1. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:
 - (a) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$,
 - (b) (binomická věta) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
2. Dokažte, že platí
 - (a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ pro $f: X \rightarrow Y$ a $A \subseteq X$,
 - (b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ pro $f: X \rightarrow Y$ a $B \subseteq Y$.
3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Dokažte:
 - (a) je-li $a = \max M$, tedy a je horní závorou M a $a \in M$, potom platí $a = \sup M$.
 - (b) je-li $b = \min M$, tedy b je dolní závorou M a $b \in M$, potom platí $b = \min M$.
4. U následujících množin nalezněte $\sup$, $\inf$, $\max$ a $\min$ (pokud existují).
Ověřte z definice.
 - (a) $M = (0, 1]$,
 - (b) $M = [0, \infty)$,
 - (c) $M = \left\{ \frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
 - (d) $M = \left\{ n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
5. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
 - a) $\inf(-A) = -\sup A$
 - b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A+B = \{z; z = x+y, x \in A, y \in B\}$.
6. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit
 - (a) $\sup(A \cup B)$,
 - (b) $\sup(A \cap B)$,pomocí $\sup A$ a $\sup B$ (v bodě (b) za předpokladu, že množina $A \cap B$ je rovněž neprázdná)?